Options M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

Le but du problème est de déterminer un équivalent de la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad u_n(\alpha) = \frac{1}{(C_{2n}^n)^\alpha}\left[\sum_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^\alpha\right] \quad \text{où} \quad \alpha > 0\,.$$

On rappelle que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle v_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}}$.

Dans tout le problème, r est un réel tel que $\dfrac{1}{2} < r < 1$.

1.*a.* Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{n+1} e^{-\alpha\frac{x^2}{n}}\,dx \leqslant v_n(\alpha) \leqslant \int_0^{n} e^{-\alpha\frac{x^2}{n}}\,dx$.

b. En déduire que : $\displaystyle v_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n\pi}{\alpha}}$.

2.*a.* Montrer que : $\displaystyle\sum_{n^r < k < n} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \leqslant n\, e^{-\alpha n^{2r-1}}$.

b. En déduire que : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n^r} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n(\alpha)$.

On notera désormais : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, k \in [2, n] \cap \mathbb{N}$, $\displaystyle p_n(k) = -\frac{\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)}{\prod_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{j}{n}\right)}$ et $\displaystyle p_n(1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$.

3.*a.* Montrer que : $\displaystyle u_n(\alpha) = \frac{2}{(C_{2n}^n)^\alpha}\left[\sum_{k=1}^{n} (C_{2n}^{n+k})^\alpha\right] + 1$.

b. Établir que, $\forall\, k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, $C_{2n}^{n+k} = C_{2n}^n\, p_n(k)$.

4.*a.* Soit $t \in [0, 1[$. Établir que : $\forall\, x \in [0, t]$,

(1) $$2x \leqslant \ln(1 + x) - \ln(1 - x) \leqslant \frac{2x}{1 - t^2}$$

(2) $$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x .$$

b. En déduire que, $[p_n(k)]^\alpha\ e^{\alpha\frac{k^2}{n}} \leqslant e^{\alpha\frac{k^2}{2n^2}}$.

c. Montrer que, en utilisant le *b.*,

$$\sum_{n^r < k \leqslant n} [p_n(k)]^\alpha$$

est négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

5.*a.* Montrer que l'on a :

$$u_n(\alpha) - 2\, v_n(\alpha) = 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n^r} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \left([p_n(k)]^\alpha\, e^{\alpha\frac{k^2}{n}} - 1 \right) + o(v_n(\alpha)) .$$

où $o(v_n(\alpha))$ est une suite négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$.

b. En utilisant (1) et (2), établir l'inégalité suivante :

$$\forall\, k \in [1, n^r] \cap \mathbb{N}, \quad [p_n(k)]^\alpha\, e^{\alpha\frac{k^2}{n}} \geqslant \exp\left(- \frac{\alpha}{n^{3-4r}(1 - n^{2r-2})} \right) .$$

c. En choisissant r convenablement, en déduire que :

$$2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n^r} \left(e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \left[(p_n(k))^\alpha\, e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} - 1 \right] \right)$$

est négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

d. En déduire finalement que $u_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{\alpha}}$.

e. Cas particulier : Donner un équivalent de C_{2n}^n .

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème n désignera un entier strictement positif.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 - x\cos t)^n} .$$

On note D_n ce domaine.

2. $x \in D_1$. Calculer $f_1(x)$.

3. Pour quelles valeurs de x, la fonction f_n est-elle dérivable ?
Quelle est alors la valeur de $f_n'(x)$.

4. Trouver une relation entre f_{n+1} , f_n et f_n' .

5. Calculer f_2 et f_3 .

6. Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, P_n \in \mathbb{R}[X]$ (P_n est un polynôme à coefficients réels) tel que :

$$\forall\, x \in D_n, \quad f_n(x) = \frac{P_n(x^2)}{(1 - x^2)^{n-1/2}} .$$

7. Montrer que f_n est développable en série entière et qu'il existe une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^* , \qquad f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \frac{(n + 2p - 1)!}{(n - 1)!\,(p!)^2}\, x^{2p} .$$

Quelle est la valeur de a_p ? Quel est le rayon de convergence de la série ainsi définie ?

8. En déduire qu'il existe $(\alpha , \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* , \qquad \forall\, x \in]-1 , 1[, \qquad \alpha f_n(x) - \frac{2n + 1}{n} f_{n+1}(x) + \beta(1 - x^2) \frac{n + 1}{n} f_{n+2}(x) = 0 .$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{(1 - x\cos t)^n}$.

10. Calculer $f_n(x)$. En déduire le polynôme P_n .

(On pourra effectuer le changement de variable $\tan\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \tan\frac{\varphi}{2}$) .